

Torusartige Plasmakonfigurationen ohne Gesamtstrom durch ihren Querschnitt im Gleichgewicht mit einem Magnetfeld

Von F. MEYER und H. U. SCHMIDT

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München
(Z. Naturforschg. 13 a, 1005—1015 [1958]; eingegangen am 30. August 1958)

Es wird gezeigt, daß torusartige¹ Plasmakonfigurationen ohne azimuthalen Gesamtstrom im Gleichgewicht mit einem äußeren Magnetfeld möglich sind. Die Strombahnen dürfen ebene Kurven sein, ihre Ebenen können sich aber nicht alle in einer Achse schneiden. Der Querschnitt des Plasmas hat notwendig Maxima und Minima. Für einige Konfigurationen werden azimuthale und meridionale Querschnitte berechnet. Weiter wird gezeigt, daß man die Gleichgewichtsbedingungen für feldfreie Plasmen zur Konstruktion eines verformbaren (Papier-)Modellgewebes benutzen kann, das eine echte Analogie zur Gesamtheit der Gleichgewichtsflächen darstellt. Seine Verwendung wird am Beispiel eines Torusmodells demonstriert.

Toruslike configurations of a plasma in equilibrium with an exterior magnetic field exist without azimuthal current. The lines of current can be plane curves but their planes cannot intersect in the same axis. The plasma cross-section must have maxima and minima. Azimuthal and meridional cross-sections are calculated. — From the equilibrium conditions the construction rule for a deformable (paper) model network is derived. This network is a true analogue to the totality of equilibrium surfaces of a plasma without an interior field. It is applied to a torus configuration.

In letzter Zeit wurden verschiedentlich magneto-hydrodynamische Gleichgewichtsarrangements zwischen einem Plasma und einem Magnetfeld angegeben. Von besonderem Interesse sind torusartige Arrangements. Die bisher bekannt gewordenen Lösungen machen dabei vom Pinch-Effekt eines azimuthalen Stromes Gebrauch. Es ist fraglich², ob ein Gleichgewicht möglich ist, auch ohne daß den Torus ein Gesamtstrom in azimuthaler Richtung durchfließt. Dieses Problem wollen wir in dieser Arbeit behandeln^{*}.

1. Grundgleichung

Dazu beschränken wir uns der Einfachheit halber auf solche Fälle, in denen das Plasmaintere feldfrei ist. Dann fließt der Strom nur in der Oberfläche des Plasmas. Weiter besitzt das Magnetfeld an der Oberfläche nur eine tangentielle Komponente \mathfrak{B}^* , wie aus $\text{div } \mathfrak{B} = 0$ folgt. Sie ist durch die 1. MAXWELLSche

Gleichung mit der Oberflächenstromdichte j^* verknüpft,

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{B}^* = \frac{4\pi}{c} j^* . \quad (1)$$

Dabei bezeichnet \mathfrak{n} die äußere Einheitsnormale auf der Oberfläche. Das Gleichgewicht zwischen äußerem Magnetfeld und Gasdruck verlangt

$$\frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}^{*2} = p . \quad (2)$$

Aus Gl. (1) und (2) folgt

$$j^{*2} = \frac{c^2}{2\pi^2} p . \quad (3)$$

Der Gasdruck p ist wegen der Feldfreiheit des Plasmas an der gesamten Oberfläche konstant. Das gleiche gilt also nach Gl. (3) für den Betrag der Oberflächenstromdichte. Zusammen mit der Divergenzfreiheit des Oberflächenstromes folgt dann, daß benachbarte Strombahnen stets gleichen Abstand voneinander halten. Unter unserer Voraussetzung gilt

¹ Auf einem torusartigen Gebilde nennen wir solche geschlossenen Linien *meridional*, die sich nur in seinem Innern auf einen Punkt zusammenziehen lassen. Die geschlossenen Linien, die sich im Innern nicht auf einen Punkt zusammenziehen lassen, nennen wir *azimutal*. Dieselben Bezeichnungen verwenden wir auch für die von den Linien umrandeten Querschnitte.

² Daß im Gleichgewicht notwendig eine „azimutale“ Stromkomponente auftritt, wurde von BIERMANN, HAIN, JÖRGENS und LÜST³ für den Kreistorus, von BIERMANN und SCHLÜTER⁴ für alle rotationssymmetrischen Torusanordnungen

und von KIPPENHAHN⁵ für spezielle nicht-rotationssymmetrische Oberflächen bewiesen.

³ L. BIERMANN, K. HAIN, K. JÖRGENS u. R. LÜST, Z. Naturforschg. 12 a, 826 [1957].

⁴ L. BIERMANN u. A. SCHLÜTER, Z. Naturforschg. 12 a, 805 [1957].

⁵ R. KIPPENHAHN, Z. Naturforschg. 13 a, 260 [1958].

^{*} A n m. b. d. K o r r.: Vgl. auch die inzwischen veröffentlichten Arbeiten der Gruppe Project Matterhorn, Princeton University, in Phys. Fluids 1, 253 ff. [1958].



also: Auf jeder Gleichgewichtsoberfläche bilden die Strombahnen ein System von äquidistanten Linien⁶.

Es gilt aber auch die Umkehrung: Gibt es auf einer Oberfläche ein System äquidistanter Linien, so stellt sie eine mögliche Gleichgewichtsoberfläche dar. Nach KIPPENHAHN⁵ kann man nämlich ein die Gleichgewichtsaufgabe lösendes Magnetfeld konstruieren, dessen zugehörige Strombahnen mit dem gegebenen Liniensystem zusammenfallen.

Diese geometrische Charakterisierung der Gleichgewichtsflächen erweist die Gleichgewichtsaufgabe als eine Frage des Zusammenhanges im Großen. Ist nämlich die Ausgangskurve auf einer beliebigen Fläche nicht selbst singulär gewählt, läßt sich im Kleinen stets das System der zu ihr äquidistanten Linien konstruieren. Erst im Großen taucht das Problem der singularitätenfreien, speziell überschneidungsfreien Überdeckung dieser Fläche auf.

Daher geht man zur Gewinnung solcher Gleichgewichtsflächen zweckmäßig von den äquidistanten Stromlinien aus und baut aus ihnen Oberflächen der gewünschten Zusammenhangesverhältnisse auf, indem man die Singularitätenfreiheit durch Konstruktion garantiert.

Wir wollen dieses Verfahren auf das Problem einer torusartigen Gleichgewichtskonfiguration ohne azimuthalen Gesamtstrom anwenden. Zunächst zeigen wir, daß hier die Stromlinien meridional in sich geschlossen sein müssen.

Dazu verschieben wir irgendeine meridional geschlossene Linie auf der Torusoberfläche so, daß sie überall den Strombahn- und Feldlinienelementen entlang verläuft. Von diesem ebenfalls meridional geschlossenen Weg können wir voraussetzen, daß die Stücke längs Magnetfeldlinien entweder alle in Feldrichtung oder alle entgegengesetzt zu ihr durchlaufen werden. Solange nämlich zwei solche durch ein Strombahnstück verbundenen Feldlinienstücke in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden, kann man durch Übergang zu Nachbarstrombahnen beide verkürzen, bis eines von ihnen vollständig verschwindet.

Der durch diese geschlossene Linie hindurchtretende Gesamtstrom ist

$$I^* = \oint |\mathbf{j}^* \times d\mathbf{l}| = \frac{c}{4\pi} \oint \mathcal{B}^* d\mathbf{l}. \quad (4)$$

Nach Gl. (1) stehen die Richtungen von Strombahnen und Feldlinien aufeinander senkrecht. Daher liefern zum Integral nur die Wegstücke einen Beitrag, die längs Feldlinien laufen. Soll der Gesamt-

strom unsere Forderung

$$I^* = 0 \quad (5)$$

erfüllen, müssen diese sämtlich verschwinden. Das heißt, der Integrationsweg ist selbst eine Stromlinie, die damit als geschlossene meridionale Kurve erwiesen wird.

2. Geometrische Bedingung

Mit den Ergebnissen des vorigen Abschnittes lautet unser Problem jetzt: Gibt es torusartige Oberflächen mit meridional geschlossenen und äquidistanten (Strom-) Linien?

Der besseren Übersicht halber wollen wir annehmen, daß die Strombahnen dabei in Ebenen liegen. Diese mögen sämtlich einer Geraden, der z -Achse, parallel sein.

Damit ist ein Polarkoordinatensystem R, φ, z ausgezeichnet (Abb. 1). In der Ebene $z=0$ wählen

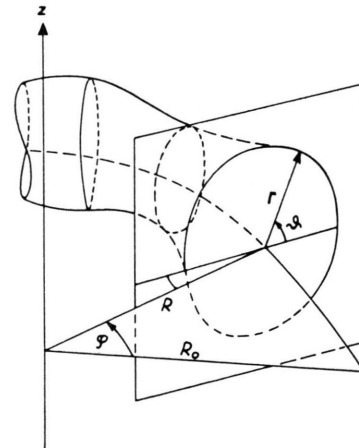


Abb. 1. Zur Einführung der Koordinaten $R, \varphi, z, r, \vartheta$.

wir eine Orthogonaltrajektorie $R(\varphi)$ der Stromebenen aus und bezeichnen sie als Seele. Dabei numerieren wir die Stromebenen mit den φ -Werten der in ihnen liegenden Seelenpunkte⁷. In jeder solchen Ebene führen wir jetzt ein Polarkoordinatensystem r, ϑ ein, dessen Ursprung in der Seele liegt. Die Richtung $\vartheta=0$ zeige dabei in der Ebene $z=0$ nach außen.

⁶ Dies ist ein Spezialfall der von KIPPENHAHN⁵ untersuchten Beziehung zwischen Strombahnen und Gleichgewichtsfläche.

⁷ Nur wenn $R(\varphi)$ konstant ist, fallen diese Ebenen mit den Ebenen $\varphi = \text{const}$ zusammen.

Damit können wir die gesuchte Gleichgewichtsfläche durch die Seele $R(\varphi)$ und die Strombahnen $r(\vartheta, \varphi)$ beschreiben. Die Form und Lage der Strombahnen ist durch die Bedingung ihrer Äquidistanz eingeschränkt. Den Abstand dl zweier benachbarter

daher

$$dl/d\varphi = \sqrt{R^2 + R'^2} g(\varphi) \quad (12)$$

und erhalten schließlich

$$r_{\varphi}^2 = \left(1 + \frac{r_{\vartheta}^2}{r^2}\right) (R^2 + R'^2) \left[g^2(\varphi) - \left(1 + \frac{r}{\varrho} \cos \vartheta\right)^2\right]. \quad (13)$$

Wir hatten gesehen, daß man im Kleinen auf jeder Fläche ein System äquidistanter Linien einzeichnen kann. Dies entsprach der Freiheit in der Vorgabe einer Funktion zweier Veränderlicher. Von dieser Freiheit bleiben in der Differentialbedingung (13) nur die beiden Funktionen $R(\varphi)$ und $g(\varphi)$

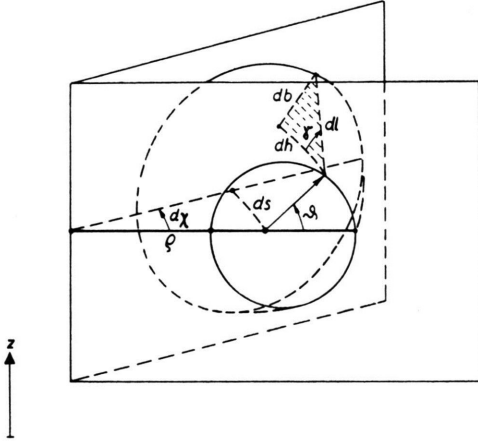


Abb. 2. Der Abstand zweier benachbarter Strombahnen.

Kurven zerlegen wir in eine Komponente dh parallel zur Seele und eine Komponente db senkrecht dazu (Abb. 2). Ist ds das zwischen den Nachbarebenen liegende Stück der Seele,

$$ds^2 = (R^2 + R'^2) d\varphi^2, \quad (6)$$

und ϱ deren Krümmungsradius mit

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{R^2 + 2R'R'' - R R'''}{\sqrt{R^2 + R'^2}^3}, \quad (7)$$

so wird der Winkel zwischen beiden Ebenen $d\chi = ds/\varrho$. Wie man aus Abb. 2 ersieht, ist dann

$$dh = \left(1 + \frac{r}{\varrho} \cos \vartheta\right) ds. \quad (8)$$

Die Komponente db ist der senkrechte Abstand zwischen den in eine gemeinsame Ebene projizierten Strombahnen. Mit dem Winkel β zwischen der Kurvennormalen und dem Radiusvektor,

$$\tan \beta = -r_{\vartheta}/r, \quad (9)$$

wird (Abb. 3)

$$db = \cos \beta \cdot r_{\varphi} \cdot d\varphi. \quad (10)$$

Aus (8) und (10) bekommt man

$$dl^2 = dh^2 + db^2 = \left\{ (R^2 + R'^2) \left(1 + \frac{r}{\varrho} \cos \vartheta\right)^2 + \frac{r_{\varphi}^2}{1 + (r_{\vartheta}^2/r^2)} \right\} d\varphi^2. \quad (11)$$

Sollen die beiden Strombahnen äquidistant sein, so darf dl offenbar nicht von ϑ abhängen. Wir setzen

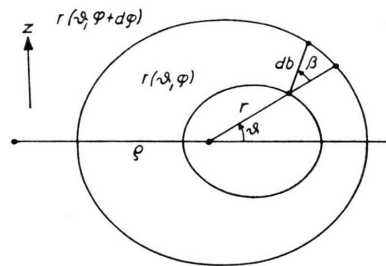


Abb. 3. Projektion zweier benachbarter Strombahnen.

übrig. Das ist im wesentlichen die Folge unserer weiteren Bedingung, daß die Strombahnen ebene Kurven sein sollen.

3. Differentialgleichung

Wir fassen jetzt Gl. (13) als eine Differentialgleichung für $r(\vartheta, \varphi)$ auf und fragen, unter welchen Bedingungen für $R(\varphi)$ und $g(\varphi)$ sie eine geschlossene torusartige Oberfläche beschreibt.

Dazu führen wir den Winkel γ zwischen Oberfläche und Seelenrichtung ein,

$$\cos \gamma = \frac{dh}{dl} = \frac{1 + (r/\varrho) \cos \vartheta}{g(\varphi)}. \quad (14)$$

Für $1/\varrho \neq 0$ ist γ längs einer Strombahn um so größer, je kleiner die rechte Seite von (14) ist, d. h. je geringer der Abstand $\varrho + r \cdot \cos \vartheta$ von der gemeinsamen „Drehachse“ der mit φ und $\varphi + d\varphi$ numerierten Ebenen ist (vgl. Abb. 2). Daher ist die Oberfläche am inneren Rand stärker gewulstet als weiter außen. Der kleinste Winkel wird am äußersten Punkt des Querschnittes erreicht und wird dort und nur dort zu Null, wenn

$$g(\varphi) = 1 + \left(\frac{r}{\varrho} \cos \vartheta\right)_{\max}. \quad (15)$$

Daher hat der Winkel γ auf der ganzen Strombahn das gleiche Vorzeichen, die Torusoberfläche ist entweder von der Seele allseitig nach außen oder allseitig nach innen geneigt.

Ein Übergang zwischen beiden Verhaltensweisen ist nur möglich, wenn an einer Stelle φ gleichzeitig

$$1/\varrho = 0 \quad \text{und} \quad g = 1. \quad (16)$$

Die Seele ist dort geradlinig, die Torusoberfläche zu ihr parallel ($\gamma = 0$); man hat dann einen infinitesimalen Zylinderausschnitt vor sich. Nach Gl. (13) ist $r_\varphi = 0$ und kann sein Vorzeichen wechseln.

Bisher wurde noch kein Gebrauch von der Torusgeometrie gemacht. Soll sich der Plasmaschlauch ringförmig schließen, so sind im Mittel die Strombahnebenen gegeneinander geneigt ($1/\varrho \neq 0$), und die damit notwendig auftretenden Querschnittsänderungen müssen beim Fortschreiten in φ -Richtung rückgängig gemacht werden. Nach der Anzahl n der dabei auftretenden Querschnittsmaxima lassen sich die Torusanordnungen klassifizieren ($n \geq 1$). Die Anzahl m der erforderlichen Nullstellen von $1/\varrho$ ist entsprechend der Zahl der Umkehrstellen (16) mindestens doppelt so groß. Daraus folgt:

*Eine Toruskonfiguration mit ebenen, geschlossenen Strombahnen, deren Ebenen sämtlich durch eine z-Achse gehen, ist nicht möglich*⁸.

Es gälte nämlich $R(\varphi) = R_0$ und $1/\varrho = 1/R_0 \neq 0$ überall, d. h. die Umkehrbedingung (16) ist nirgends erfüllt.

Wir wollen die Geschlossenheit unserer Torusanordnungen jetzt durch spezielle Forderungen an die beiden Funktionen $R(\varphi)$ und $g(\varphi)$ garantieren.

Der Torus bestehe dazu aus n gleichen Stücken, die stetig aneinandergefügt seien. Jedes Stück sei in sich spiegelsymmetrisch. Dann ist die Anordnung periodisch mit dem Winkel $2\pi/n$ und symmetrisch zu den Stellen

$$\varphi_\nu = \nu \cdot \frac{\pi}{n}, \quad \nu = 0, 1, \dots, 2n-1. \quad (17)$$

Die n Minima liegen dabei an den Stellen mit geradem Index φ_{2l} und die n Maxima an den ungeraden Stellen φ_{2l+1} ($l = 0, 1, \dots, n-1$).

Gibt $\Gamma(\varphi)$ die φ -Abhängigkeit einer der Funktionen $R(\varphi)$, $g(\varphi)$ oder $r(\vartheta, \varphi)$, so gilt also

$$\Gamma\left(\varphi + \frac{2\pi}{n}\right) = \Gamma(\varphi), \quad \Gamma(\varphi_\nu + \varphi) = \Gamma(\varphi_\nu - \varphi). \quad (18)$$

Aus Symmetriegründen gehen die Stromebenen an den Stellen φ_ν durch die z-Achse, d. h.

$$R'(\varphi_\nu) = 0. \quad (19)$$

Soll die Torusoberfläche dort knickfrei sein, so muß nach (16)

$$g(\varphi_\nu) = 1 \quad (20)$$

und wegen (19) und (7)

$$R(\varphi_\nu) = R''(\varphi_\nu) \quad \text{sein.} \quad (21)$$

Für unsere Beispiele suchen wir noch eine einfache Seele, die sich diesen Bedingungen fügt und eine leichte analytische Behandlung gestattet. Wir wählen die im \cos lineare Funktion

$$R(\varphi) = 1 - \frac{\cos 2n\varphi}{1 + 4n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (22)$$

Ihr Mittelwert ist auf 1 normiert.

Es mögen nun $R(\varphi)$ und $g(\varphi)$ die Symmetrieeigenschaft (18) und die Bedingungen (19) bis (21) erfüllen. Dann folgt aus (13), daß auch die Lösung $r(\vartheta, \varphi)$ diese Symmetrie (18) besitzt. Das gilt unabhängig von der Wahl des noch freien Anfangsquerschnittes $r(\vartheta, 0)$.

Als einzige Bedingungen dafür, daß dann unsere Integration eine sinnvolle Torusoberfläche ergibt, bleiben die Forderungen, daß erstens r_φ^2 nach Gl. (13) stets ≥ 0 bleibt und daß zweitens die so bestimmte Oberfläche sich nicht selbst durchdringt.

4. Lösung mit Charakteristiken

Wir werden jetzt die Diff.-Gl. (13) in der Form

$$F(\vartheta, \varphi, r, r_\vartheta, r_\varphi) \equiv \quad (23)$$

$$r_\varphi^2 - \left(1 + \frac{r_\vartheta^2}{r^2}\right) (R^2 + R'^2) \left[g^2 - \left(1 + \frac{r}{\varrho} \cos \vartheta\right)^2\right] = 0$$

genauer untersuchen. Die Integration dieser partiellen Differentialgleichung ist äquivalent mit der Lösung des ihr zugeordneten Systems der charakteristischen (gewöhnlichen) Differentialgleichungen⁹

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{du} &= F_{r_\vartheta}, & \frac{d\varphi}{du} &= F_{r_\varphi}, & \frac{dr}{du} &= r_\varphi F_{r_\varphi} + r_\vartheta F_{r_\vartheta}, \\ \frac{dr_\vartheta}{du} &= -(r_\vartheta F_r + F_\vartheta), & \frac{dr_\varphi}{du} &= -(r_\varphi F_r + F_\varphi). \end{aligned} \quad (24)$$

Aus diesen Gleichungen bestimmen sich die Charakteristiken als Funktionen des Parameters u ,

$$\vartheta(u), \varphi(u), r(u); r_\vartheta(u), r_\varphi(u). \quad (25)$$

⁸ Hierunter fallen auch die oben erwähnten Unmöglichkeitsbeweise.

⁹ R. COURANT u. D. HILBERT, Methoden der math. Physik, Bd. 2, Springer-Verlag, Berlin 1937, S. 65.

Sie hängen noch von den vorgegebenen Anfangswerten ab. Die Gesamtheit der Charakteristiken, die durch die vorgegebene Anfangsströmbahn führen, spannen die gesuchte Lösungsfläche der Gl. (23) auf.

Dieses System der charakteristischen Gln. (24) läßt sich durch Einführung neuer Koordinaten wesentlich vereinfachen und seine Ordnung um zwei erniedrigen.

Wir setzen dazu

$$x = r \cos \vartheta, \quad z = r \sin \vartheta, \quad \alpha = \vartheta + \beta \quad (26)$$

mit dem in (9) eingeführten Winkel β . Dann erhält man nach einiger Zwischenrechnung das Differentialgleichungssystem

$$\frac{dx}{d\varphi} = \cos \alpha \cdot \sqrt{(R^2 + R'^2) \left[g^2 - \left(1 + \frac{x}{\varrho} \right)^2 \right]}, \quad (27a)$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = \sin \alpha \cdot \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{(R^2 + R'^2) \left[g^2 - \left(1 + \frac{x}{\varrho} \right)^2 \right]} \quad (27b)$$

sowie die Quadraturaufgabe

$$\frac{dz}{d\alpha} = \sin \alpha \cdot \sqrt{(R^2 + R'^2) \left[g^2 - \left(1 + \frac{x}{\varrho} \right)^2 \right]}. \quad (27c)$$

Die übrigen Koordinaten bestimmen sich aus

$$r^2 = x^2 + z^2, \quad \operatorname{tg} \vartheta = z/x. \quad (28)$$

Die drei Gln. (27) lassen sich auch unmittelbar einsehen. Dazu bestimmen wir die Änderungen von x und α , wenn man auf der Torusoberfläche längs einer *Magnetfeldlinie* (d. h. also senkrecht zur Strombahn) fortschreitet. Man ersieht aus Abb. 4 (welche dieselbe Projektion wie Abb. 3 darstellt)

$$dx = \cos \alpha \cdot db, \quad dz = \sin \alpha \cdot db,$$

$$d\alpha = \sin \alpha \cdot \frac{\partial}{\partial x} (db). \quad (29)$$

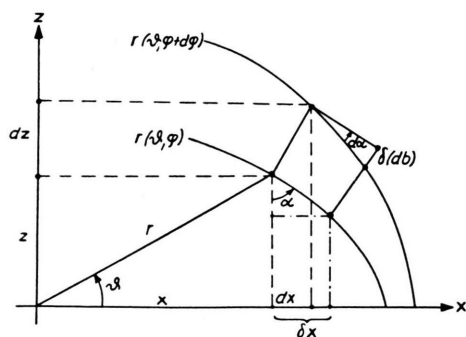


Abb. 4. Die charakteristischen Koordinaten x und α und ihre Differentiale.

Die letzte dieser Gleichungen entsteht durch Vergleich zweier im Querschnitt benachbarter Abstände db . Die partielle Ableitung ist daher unter Festhaltung von φ auszuführen. Aus (29) ergeben sich direkt die Gln. (27), wenn man für db seinen Wert nach Gln. (10), (9) und (13) einsetzt.

Damit ist aber weiter gezeigt, daß die *Charakteristiken unserer Gl. (13) identisch mit den Magnetfeldlinien sind*.

Besonders einfach wird die Lösung unseres Differentialgleichungssystems (27) für $\alpha = 0$. Dann verschwinden die rechten Seiten von (27b) und (27c), und man erhält eine Magnetfeldlinie mit

$$\alpha(\varphi) \equiv 0, \quad z(\varphi) = \text{const} = z_a, \quad (30)$$

d. h. eine ebene Kurve in der Ebene $z = z_a$. Nun kennzeichnet $\alpha = 0$ offenbar die äußersten Stellen der Strombahnen (vgl. Abb. 4). Daher ist die Feldlinie (30) die äußerste Linie auf der Oberfläche, und ihre Koordinate $x = x_a(\varphi)$ gibt den Maximalabstand der Torusanordnung von der z -Achse an. Diesen kann man frei bestimmen, wenn man $g(\varphi)$ geeignet wählt. Aus Gl. (27a) mit $\alpha = 0$ erhält man dafür

$$g^2(\varphi) = \frac{1}{R^2 + R'^2} \left(\frac{dx_a}{d\varphi} \right)^2 + \left(1 + \frac{x_a}{\varrho} \right)^2. \quad (31)$$

Hierdurch übertragen sich die Symmetrieforderungen (18) von $g(\varphi)$ auf $x_a(\varphi)$, die Stetigkeitsbedingung (20) verlangt an den Stellen $\varphi = \varphi_v$

$$dx_a/d\varphi = 0. \quad (32)$$

Mit der Darstellung (31) für $g(\varphi)$ garantiert man die Positivität des Wurzelausdruckes in den Gln. (13) und (27) für alle kleineren Werte von $(1 + x/\varrho)^2$, die früher eine Einschränkung für $g(\varphi)$ bedeutete.

Auch die innersten Stellen der Torusfläche liegen auf einer Magnetfeldlinie. In ihnen ist $\alpha = \pi$, Gln. (27b) und (27c) ergeben

$$\alpha(\varphi) \equiv \pi, \quad z(\varphi) = \text{const} = z_i, \quad (33)$$

und die am weitesten nach innen erstreckte Koordinate $x_i(\varphi)$ gehorcht nach (27a) und (31)

$$\frac{dx_i}{d\varphi} = - \sqrt{x_a'^2 + (R^2 + R'^2) \left[\left(1 + \frac{x_a}{\varrho} \right)^2 - \left(1 + \frac{x_i}{\varrho} \right)^2 \right]}. \quad (34)$$

Damit kann man bei vorgegebenem Verlauf der Seele und des äußeren Abstandes die innerste Erstreckung der Toruskoordinate ausrechnen. In der Azimutalebene $z = 0$ abgetragen ergeben $x_a(\varphi)$ und $x_i(\varphi)$ einen Schattenriß der Torusfläche. An diesem ist die

Frage beantwortbar, ob die gerechnete Fläche sich selbst durchdringt und damit physikalisch sinnlos wird. In diesem Fall müßte die Kurve $x_i(\varphi)$ Doppelpunkte besitzen. Im allgemeinen kann man das vermeiden, indem man den Anfangswert von $|x_i|$ genügend klein wählt.

Für alle übrigen Feldlinien auf der Torusfläche hat man das volle Dgl.system (27 a), (27 b) zu lösen. Ihre Projektionen verlaufen im Schattenriß zwischen den beiden Grenzl原因en $x_a(\varphi)$ und $x_i(\varphi)$. Auch ihre Koordinaten $z(\varphi)$ sind beschränkt, da die rechten Seiten von (27 c) periodisch um Null schwanken. Also bleibt die aus den Feldlinien gebildete Torusoberfläche selbst endlich und geschlossen.

Unser Verfahren zur Konstruktion torusartiger Gleichgewichtsflächen ist noch an die Bedingung der Überschneidungsfreiheit gebunden. Eine dafür günstigste Wahl von $x_a(\varphi)$ ist

$$x_a(\varphi) \equiv 0. \quad (35)$$

Bei dieser Vorgabe wird nämlich die gefährliche Ausbauchung der innersten Linie zum Minimum [vgl. Formel (34)]. Die x -Werte aller anderen Feldlinien sind dann negativ. Für die innerste Linie folgt aus (34)

$$\frac{d|x_i|}{d\varphi} = \sqrt{(R^2 + R'^2) \frac{|x_i|}{\varrho} \left(2 - \frac{|x_i|}{\varrho}\right)}. \quad (36)$$

Gilt speziell die Näherung

$$|x_i| \ll \varrho, \quad (37)$$

so besitzt diese Dgl. die Lösung

$$|x_i| = \left(\sqrt{|x_i|_0} + \int^{\varphi} \sqrt{\frac{R^2 + R'^2}{2\varrho}} d\varphi \right)^2. \quad (38)$$

Im allgemeinen Fall liefert eine numerische Integration von (36) die gewünschte Kurve. Wir haben sie mit den Funktionen (22) für eine Reihe von n -Werten ausgeführt. Abb. 5 a bis e zeigt die Schattenrisse für Torusanordnungen vom Typ $n = 1, 2, 3, 4$ und 8. Wie man erkennt, werden die Maxima im Verhältnis zu den Minima um so größer, je weiter ihr gegenseitiger Winkelabstand

$$\Delta\varphi = 2\pi/n \quad (39)$$

ist. Das begrenzt gleichzeitig die Größe der Minima, wenn sich der Torus in den Maxima nicht durchdringen soll. Speziell für den Fall eines einzigen Maximums ($n = 1$) gibt es keine durchdringungs-

freie Lösung, der Durchmesser x_i wird vor Erreichen des halben Umlaufes zu Null (Abb. 5 a) ¹⁰.

Für große Werte n der Periodizität und gleichzeitige Gültigkeit von (37) erhält man aus (22), (7) und (38) die Näherung

$$|x_i(\varphi)| = \left(\sqrt{|x_0|} + \frac{1 - \cos n\varphi}{n} \right)^2. \quad (40)$$

Die relativen Radiuschwankungen sind dafür

$$\frac{|x_i|_{\max} - |x_i|_{\min}}{|x_i|_{\min}} = \frac{4}{n|x_0|} \left(\frac{1}{n} + \sqrt{|x_0|} \right), \quad (41)$$

sie nehmen mit der Zahl der Maxima ab. Dagegen bleibt die Oberflächenwelligkeit, gemessen am Winkel zwischen Seelenrichtung und innerster Linie, von der Größenordnung

$$\frac{d|x_i|}{d\varphi} = 2\sqrt{|x_i|} \sin n\varphi. \quad (42)$$

Die in diesem Abschnitt gerechneten Beispiele beweisen die Behauptung: *Es gibt torusartige Gleichgewichtsarrangements mit meridional geschlossenen Strombahnen.*

Der gezeigte Schattenriß ist gleichzeitig azimutaler Querschnitt der Anordnung, wenn nur innerste und

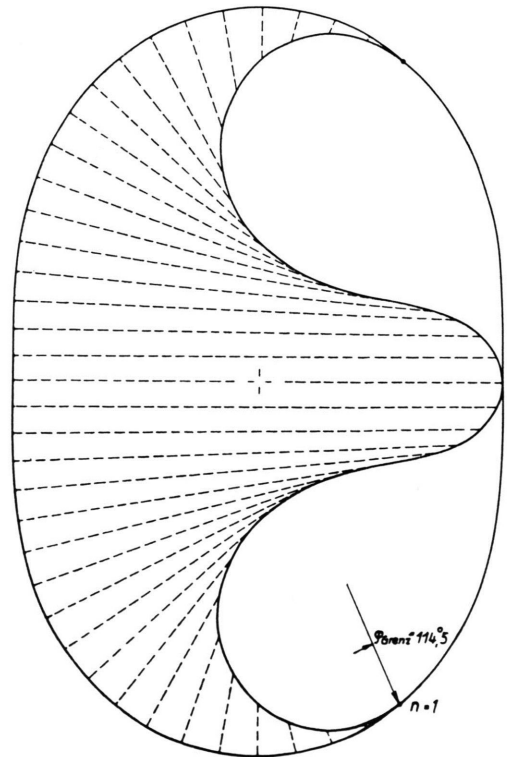


Abb. 5 a.

Abb. 5 a–e. Azimutale Querschnitte für $n = 1, 2, 3, 4$ und 8.

¹⁰ Dagegen kann man mit einer anderen Wahl von $R(\varphi)$ solche Anordnungen sehr wohl angeben.

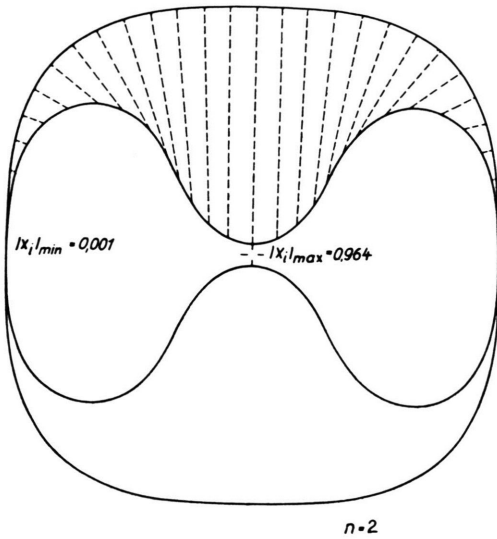


Abb. 5 b.

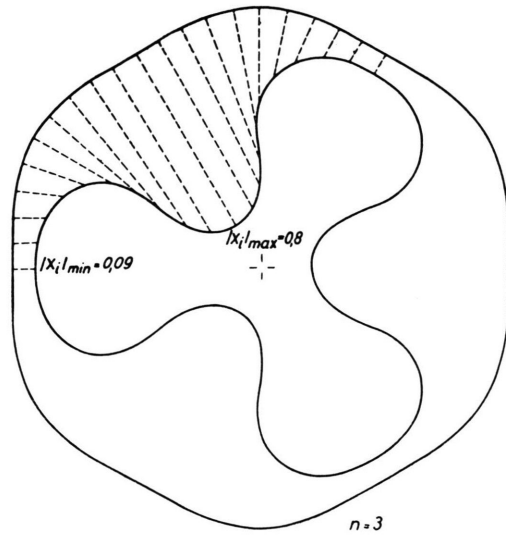


Abb. 5 c.

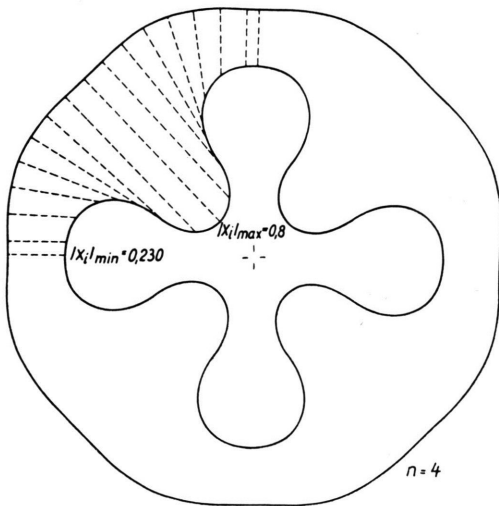


Abb. 5 d.

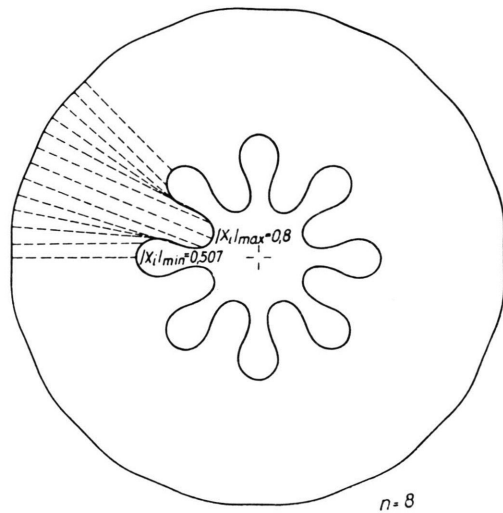


Abb. 5 e.

äußerste Linien der Oberfläche in derselben Ebene liegen. Das ist bei zu einer solchen Ebene symmetrischen Anordnungen der Fall. Die meridionalen Schnitte durch den Torus hängen noch von der noch freien Vorgabe einer Anfangsströmbahn ab. Wir wollen für sie noch eine Folge besonders einfacher Beispiele durchrechnen.

5. Ähnlichkeitslösung

Dazu beschränken wir uns auf den Fall (37) und setzen für die Lösung von (13) an

$$r(\vartheta, \varphi) = f(\varphi) \cdot t(\vartheta). \quad (43)$$

Die Separation verlangt in der linearisierten Gl. (13)

$$g^2(\varphi) = 1 + 2c \frac{f(\varphi)}{\varrho} \quad (44)$$

mit einer Konstanten c . Dann zerfällt (13) in die gewöhnlichen Gleichungen

$$\frac{df}{d\varphi} = \sqrt{2(R^2 + R'^2)} \frac{f}{\varrho}, \quad (45)$$

$$\frac{dt}{d\vartheta} = t \cdot \sqrt{\frac{t^2}{c - t \cos \vartheta} - 1}. \quad (46)$$

Die Gl. (45) ist in der Näherung (37) mit (36)

identisch und besitzt die Lösung (38):

$$f(\varphi) = \left(\sqrt{f_0} + \int^{\varphi} \sqrt{\frac{R^2 + R'^2}{2\rho}} d\varphi \right)^2. \quad (38a)$$

Der Anteil $f(\varphi)$ der Lösung variiert also wie die innerste Linie einer Anordnung mit $x_a \equiv 0$, d. h. $g \equiv 1$ [vgl. (35) und (31)].

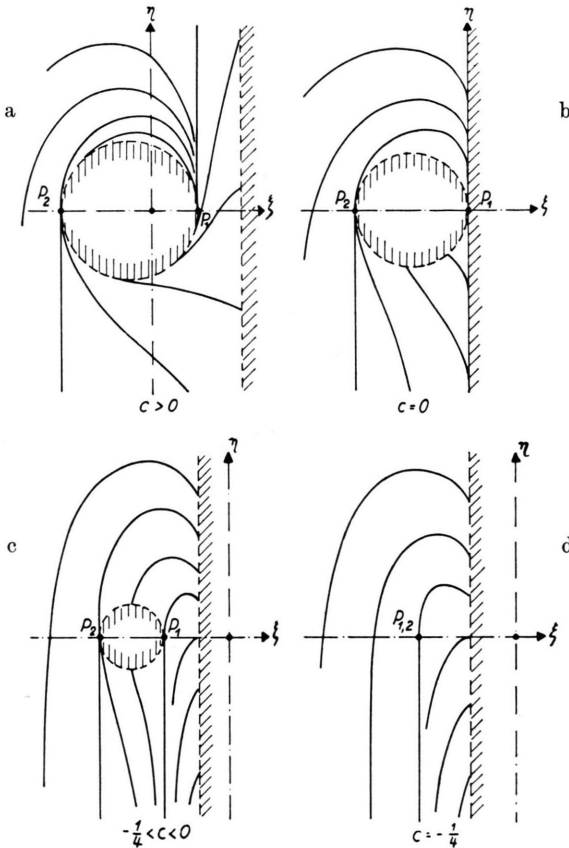


Abb. 6 a–d. Das Richtungsfeld der Separationsgleichung für meridionale Querschnitte; $c > 0$, $c = 0$, $-1/4 < c < 0$, $c = -1/4$.

Für den Anteil $t(\vartheta)$ betrachten wir das Richtungsfeld von (46), Abb. 6 a. Wir benutzen dabei die kartesischen Koordinaten

$$\xi = t \cdot \cos \vartheta, \quad \eta = t \cdot \sin \vartheta. \quad (47)$$

Die gekennzeichneten Integrallinien gehören zum positiven Wurzelvorzeichen. Die anderen mit $dt/d\vartheta < 0$ entstehen daraus durch Spiegelung $\vartheta \rightarrow -\vartheta$. Ein-gezeichnet ist ferner der Kreis

$$\left(\xi + \frac{1}{2}\right)^2 + \eta^2 = c + \frac{1}{4}. \quad (48)$$

Auf ihm ist $dt/d\vartheta = 0$. Die Stellen mit umgekehrt

$dt/d\vartheta = 0$ liegen auf der Geraden

$$\xi = c. \quad (49)$$

Innerhalb des Kreises und rechts dieser Grenzgeraden existieren keine reellen Lösungen. Zwei explizite Lösungen sind die beiden Kreistangenten

$$\xi = \xi_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{c + \frac{1}{4}}, \quad \xi = \xi_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{c + \frac{1}{4}}. \quad (50)$$

Ihre Berührungspunkte mit dem Kreis

$$P_1(\xi = \xi_1, \eta = 0) \text{ und } P_2(\xi = \xi_2, \eta = 0) \quad (51)$$

sind die singulären Punkte des Richtungsfeldes. In sie münden Integrallinien ein, welche die Lösungsgeraden parabolisch tangieren, und zwar in P_1 aus dem Gebiet $\eta > 0$ und in P_2 aus dem Gebiet $\eta < 0$ kommend.

Die interessierende Integrallinie geht vom Punkt P_2 mit senkrechter Tangente aus und mündet nach halbkreisartigem Verlauf in der Halbebene $\eta > 0$ ebenso in P_1 . Sie und sie allein ist durch die Spiegelung $\eta \rightarrow -\eta$, d. h. durch die Hinzunahme des negativen Wurzelvorzeichens, zu einer geschlossenen, knickfreien Kontur zu ergänzen. Damit ist für jeden Wert $c > 0$ eindeutig eine geschlossene Lösung von (46) bestimmt. Interessant ist noch der Grenzfall $c = 0$, Abb. 6 b. Die Grenzgerade fällt hier mit der Lösungsgeraden durch P_1 zusammen. Sie besteht aus singulären Punkten, in die die Integrallinien münden. Auch die ausgezeichnete Integrallinie hat ein Stück mit ihr gemeinsam. Für die Fälle $c < 0$ existiert keine geschlossene Kurve mehr, wie die Richtungsfelder $-1/4 < c < 0$ und $c = -1/4$ zeigen (Abb. 6 c, d). In diesen Fällen liegt der Ursprung außerhalb des Grenzkreises: Es gibt keine Separationslösung (43), bei der die Seele außerhalb des Querschnittes verläuft.

In Abb. 7 zeigen wir schließlich das Ergebnis der numerischen Integration der Kontur für eine Reihe von c -Werten. Jede von ihnen liefert mit (43) einen Strombahnquerschnitt, der sich entlang des Torus ähnlich bleibt. Aufgetragen wurde dabei die normierte Kurve

$$\tau(\vartheta) = \frac{2}{1 + \sqrt{4c + 1}} t(\vartheta). \quad (52)$$

Für $c \rightarrow \infty$ nähert sie den Kreis an, der die auf τ umgerechnete Gl. (46) asymptotisch löst. Damit allerdings für große c die Bedingung (37)

$$|x_i| \approx f t \rightarrow 2\sqrt{c} \cdot f \ll \rho \quad (53)$$

erfüllt bleibt, hat man für entsprechend kleine Werte von $f(\varphi)$ zu sorgen. Das bedeutet z. B. in der Lö-

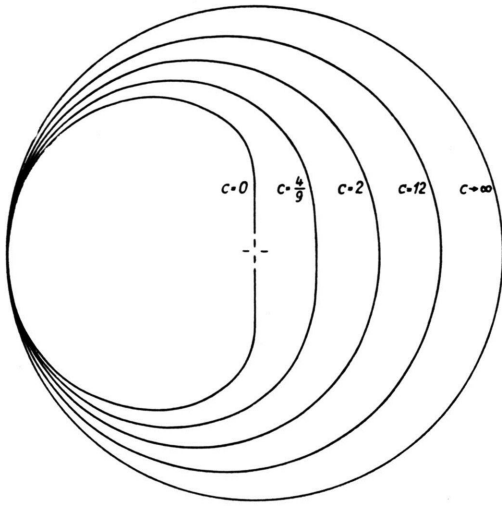


Abb. 7. Meridionale Querschnitte.

sung (40)

$$f(\varphi) = \left(\sqrt{f_0} + \frac{1 - \cos n \varphi}{n} \right)^2 \quad (40 a)$$

auch eine hohe Periodizität n . Es gibt also hier den Fall eines Torus mit genähert kreisförmigem Querschnitt, aber großer Oberflächenwelligkeit.

6. Ein Analogiemodell für Gleichgewichtsflächen

Wir hatten gesehen, daß es auf jeder Gleichgewichtsfläche ein Netz aus äquidistanten Strombahnen und den dazu senkrechten Feldlinien gibt. Wir können dieses Netz als Koordinatensystem benutzen. Es stelle also in der Parameterdarstellung der Fläche der Ortsvektor

$$\mathfrak{r}(u, v)$$

mit $u = \text{const}$ die Strombahnen, mit $v = \text{const}$ die Feldlinien dar. Die Bedingung der Orthogonalität lautet

$$\mathfrak{r}_u \cdot \mathfrak{r}_v = 0, \quad (54)$$

die Äquidistanz verlangt

$$\mathfrak{r}_u \cdot \mathfrak{r}_u = E(u).$$

Man kann auf den Feldlinien speziell die Bogenlänge als Parameter v wählen und erhält dann

$$\mathfrak{r}_u \cdot \mathfrak{r}_u = 1. \quad (55)$$

Diese Bedingungen (54) und (55) bestimmen allein noch keine Lösung $\mathfrak{r}(u, v)$ des Gleichgewichtsproblems. Wir hatten oben zusätzlich gefordert, daß

die Strombahnen eben sein sollen,

$$\mathfrak{r}_v \cdot \mathfrak{n}(u) = 0, \quad (56)$$

mit einem nur u -abhängigen Einheitsvektor \mathfrak{n} . Die Charakteristiken des so vervollständigten Differentialgleichungssystems (54), (55), (56) für die drei Komponenten von \mathfrak{r} sind genau die Feldlinien und die Strombahnen. Das geht aus der charakteristischen Form von (55) und (56) hervor, in der jeweils nur die Ableitungen in einer Richtung vorkommen¹¹.

An die Stelle von (56) können irgendwelche anderen Bedingungen treten, z. B. eine Funktion

$$F(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_u, \mathfrak{r}_v, u, v) = 0.$$

Insbesondere kann eine bestimmte Fläche

$$F(\mathfrak{r}) = 0 \quad (57)$$

vorgeschrieben werden, auf der die Lösung dann das System der Strombahnen und Feldlinien angibt. Wegen der Bedingung (55) gilt als Verallgemeinerung unserer früheren Feststellung: *In allen die Gleichgewichtsfläche beschreibenden Dgl.systemen sind die Magnetfeldlinien Charakteristiken.* Störungen in der Anfangsverteilung bereiten sich also längs der Feldlinien aus.

Dies steht im Zusammenhang mit einer differentialgeometrischen Eigenschaft der Feldlinien auf der Lösungsfläche. Um das einzusehen, benutzen wir das Linienelement in unserer Parameterdarstellung. Aus (54) und (55) erhält mit

$$\mathfrak{r}_v \cdot \mathfrak{r}_v = G(u, v) \quad (58)$$

die erste Fundamentalform

$$ds^2 = du^2 + G(u, v) dv^2. \quad (59)$$

Aus dieser Form folgt: Die Magnetfeldlinien $v = \text{const}$ sind geodätische Linien. Sie sind nämlich Lösungen der für die geodätischen Linien gültigen Dgl., die in unseren Koordinaten lautet

$$\ddot{u} \ddot{v} - \dot{v} \ddot{u} + \dot{u}^2 \dot{v} \frac{G_u}{G} + \dot{u} \dot{v}^2 \frac{G_v}{G} - \dot{v}^3 = 0. \quad (60)$$

Man kann auch direkt aus (55) und (56) ableiten, daß längs der Feldlinien ihr Krümmungsvektor

$$1/\rho \cdot \mathfrak{n} = \mathfrak{r}_{uu}$$

stets in Richtung der Flächennormalen $\mathfrak{r}_u \times \mathfrak{r}_v$ steht (\mathfrak{n} = Hauptnormale).

¹¹ In Gl. (13) kommen die Strombahnen als Charakteristiken nicht mehr vor, da die Gl. (56) dort schon integriert ist: $\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{n} = g(u)$.

Als geodätische Linien sind die Feldlinien kürzeste Verbindungen zwischen zwei Punkten. Diese Eigenschaft kann man als Folge der MAXWELLSchen Spannungen verstehen, die einen Zug längs der Feldlinien ausüben.

Die Strombahnen $v = \text{const}$ sind als Orthogonal-linien des geodätischen Feldliniensystems von selbst geodätisch parallel, d. h. äquidistant. Unsere Gleichgewichtsaufgabe kann man daher so formulieren:

Welche geschlossenen Flächen lassen sich singularitätenfrei durch ein System geodätischer Linien überdecken?

Dies ist eine Frage des Zusammenhanges im Großen, die analytisch nur in einfachen Fällen überschaubar ist. Als ein Beispiel dafür legt die Untersuchung des Kreistorus durch KIPPENHAHN⁵ die Rotationsstorusflächen nahe (vgl. auch JÖRGENS¹²). Für diese gilt der Satz¹³ der Differentialgeometrie:

Längs jeder geodätischen Linie ist das Produkt $R \cdot \sin \alpha$ aus dem Radius des Parallelkreises und dem Sinus des Winkels, den die Geodätische mit dem Meridian einschließt, konstant.

Jedes Feldliniensystem

$$R \cdot \sin \alpha = R_0 \cdot \sin \alpha_0 \quad (61)$$

ergibt also eine Gleichgewichts-anordnung auf der Rotationsfläche, und der größte Winkel, den überhaupt eine Feldlinie am äußeren Rand mit dem Meridian bilden kann, ist durch das Verhältnis

$$\sin \alpha_1 = R_0/R_1 < 1 \quad (62)$$

des kleinsten zum größten Radius bestimmt. Entsprechend hat der Strom außen stets eine azimutale Komponente, und es gibt keine Gleichgewichts-anordnung eines *Rotationstorus ohne azimutalen Gesamtstrom*.

Zur allgemeinen Behandlung der Überdeckungsfrage untersuchen wir den Zusammenhang zwischen zwei verschiedenen Gleichgewichtsflächen. Durch die gleichen Parameterwerte v sind die Feldlinien der einen denen der anderen zugeordnet, das gleiche geschieht durch u für die Strombahnen. Sehen wir von den Verformungen ab, welche die Maßbeziehungen (59) nicht ändern, so ist der einzige Unterschied zwischen beiden Flächen der, daß die Feldlinien an den entsprechenden Stellen verschiedenen Abstand \sqrt{G} haben¹⁴. Durch Verändern dieses Feldlinienabstandes kann man also die eine Fläche aus der

anderen erhalten. Insbesondere kann man so alle Gleichgewichtsflächen aus der Ebene

$$ds^2 = du^2 + dv^2 \quad (63)$$

bekommen. Diesen Zusammenhang kann man zur Herstellung einer Modellfläche benutzen. Dazu hat man nur ein System geodätischer Streifen derartig zu verbinden, daß ihr gegenseitiger Abstand variabel ist. Ein solches Modell läßt sich aus Papier einfach herstellen.

Die Magnetfeldlinien sind als geodätische Linien mit ihrer Tangentenfläche in die Ebene abwickelbar. Daher kann man zu ihrer Darstellung ein System von Papierstreifen nehmen. Die Strombahnen sollen dieses System senkrecht durchschneiden, müssen aber variierbare Länge besitzen. Man kann sie durch eine Folge von Papierstegen darstellen, wenn man diese Stege zwischen den Feldlinienstreifen zieharmonika-artig faltet. Dann bekommt man ein Papiergeitter der in Abb. 8 gezeigten Gestalt. In ihm stellen die durch-

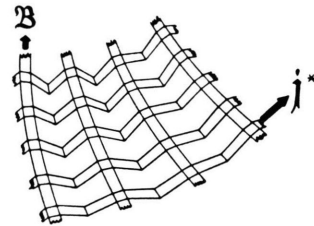


Abb. 8. Modellgewebe.

laufenden Streifen die magnetischen Feldlinien darstellen. Die Strombahnen sind die Projektionen der gefalteten Stege in die von den Streifen gebildete mittlere Fläche.

Um mit einem solchen Modellpapier geschlossene Gleichgewichtsflächen nachzubilden, hat man es so zusammenzufügen, daß Strombahnen und Feldlinien keine freien Enden mehr aufweisen. Ist das gelungen, so hat man das *Überdeckungsproblem im Großen gelöst* und eine mögliche Gleichgewichtskonfiguration nachgeahmt.

Wir wollen noch die Herstellung von Torusmodellen beschreiben. Um den in dieser Arbeit behandelten Fall einer Anordnung ohne azimutalen Gesamtstrom zu erhalten, geht man von einem rechteckigen Papiergeitter aus und klebt es zunächst zylindrisch

¹² K. JÖRGENS, Z. Naturforschg. **13 a**, 493 [1958].

¹³ z. B. W. HAAK, Differential-Geometrie, Teil I, Wolfenbütteler Verlagsanstalt, Wolfenbüttel u. Hannover 1949, S. 105.

¹⁴ $\sqrt{G} dv$ ist der Abstand zwischen den Feldlinien v und $v+dv$.

so zusammen, daß die Strombahnen geschlossen sind. Durch ringförmiges Zusammenbiegen des Zylinders und Aneinanderfügen der freien Enden der Feldlinien entsteht daraus die gewünschte Konfiguration. Einen so hergestellten Papiertorus¹⁵ von ca. 50 cm Durchmesser zeigt die Abb. 9. Bei diesem Torus laufen die Feldlinien ebenfalls in sich zurück. Wir haben

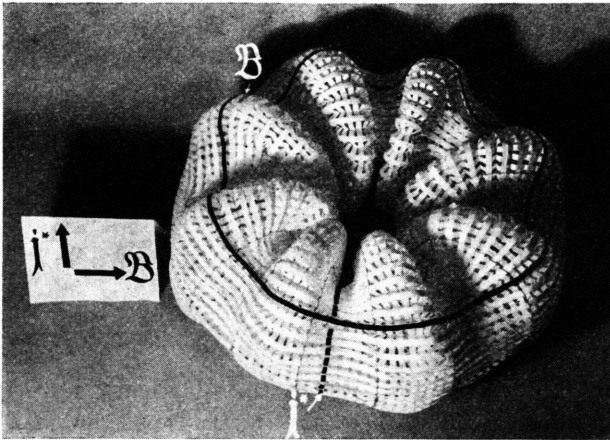


Abb. 9. Räumliches Torusmodell für $n=8$.

ihm die Gestalt $n=8$ mit 8 Maxima des Querschnittes gegeben. Er ist praktisch das räumliche Modell zu dem früher gerechneten Querschnitt für $n=8$ (Abb. 5 c). Man sieht gut die Wulstung der inneren Feldlinien, die sich daraus ergibt, daß die äußeren und inneren Feldlinien gleich lang sind.

Torusanordnungen, wie den früher³ untersuchten Kreistorus mit rein azimuthalem Strom, erhält man, wenn man in umgekehrter Reihenfolge zuerst die Feldlinien in sich schließt und dann diesen Zylinder ringförmig zum Torus biegt. Entsprechend ergeben sich Anordnungen der in früheren Arbeiten^{5, 12} und in unserem Beispiel der Rotationsfläche behandelten Art, wenn man zunächst die Strombahnen versetzt aneinanderfügt. Der aus einem solchen Zylinder zusammengebogene Torus wird dann von den Stromlinien spiralartig umlaufen.

Durch die überraschende Verformbarkeit solcher Papierflächen erhält man einen Eindruck von der Mannigfaltigkeit möglicher Gleichgewichtsflächen.

Zum Abschluß sei eine Bemerkung über das Magnetfeld im Außenraum angefügt. Die auf der Gleichgewichtsfläche vorgegebenen Magnetfelder lassen sich im allgemeinen nur bis zu einem gewissen endlichen Abstand von der Fläche singularitätenfrei fortsetzen. Innerhalb dieses Abstandes müssen bei einer wirklichen Anordnung die das Feld erzeugenden Spulen angebracht werden. JÖRGENS¹² hat die Größe dieses Abstandes bei den axialsymmetrischen Anordnungen untersucht und ihn für elliptische Querschnitte explizit angegeben. Falls keine besonderen Symmetrien vorliegen, darf man erwarten, daß dieser Abstand von der Größenordnung der Krümmungsradien unserer Gleichgewichtsoberfläche ist.

¹⁵ Wir möchten besonders Herrn W. STODIEK für die Mithilfe bei seiner Herstellung danken.